B

平成31年度

前期日程

数学問題

〔注　意〕

1．問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．

2．受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 **10** か所）に正確に記入すること．

3．問題本文は，3 ページ，5 ページ，7 ページ，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．

4．解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．

5．解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること．指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする．

6．問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

7．解答用紙は持ち帰ってはいけない．

8．問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること．

(下 書 き 用 紙)

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．ただし，log は自然対数，e はその底とする．

(1) b を実数とする．関数

$$f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ．

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a, b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める．

$$I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$$

を求めよ．ただし，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1) = 0$$

を用いてもよい．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

2 自然数 a, b に対し,

$$w = \cos\frac{a\pi}{3+b} + i\sin\frac{a\pi}{3+b}$$

とおく. ただし, i は虚数単位とする. 複素数 z_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を以下のように定める.

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 - w, \quad z_n = (1 - w)z_{n-1} + wz_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $a = 4$, $b = 3$ のとき, 複素数平面上の点 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ.

(2) $a = 2$, $b = 1$ のとき, z_{63} を求めよ.

(3) さいころを 2 回投げ, 1 回目に出た目を a, 2 回目に出た目を b とする. このとき $z_{63} = 0$ である確率を求めよ.

(配点率 20 %)

3 実数 s, t が $s^2 + t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき, xy 平面上で点 $(s + t, st)$ が動く領域を A とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $(2, \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ.

(2) A を図示せよ.

(3) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

(配点率 20 %)

(下 書 き 用 紙)

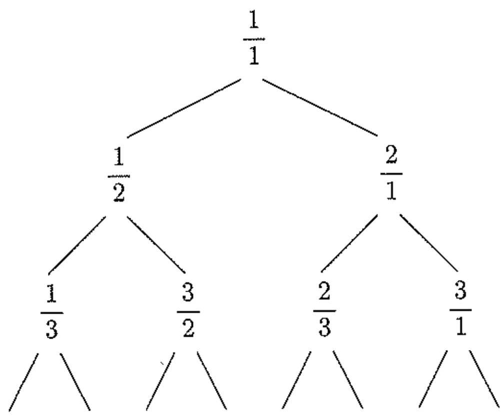
4 下の図は, $\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$, 右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である. このとき以下の問いに答えよ.

(1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ. ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす.

(2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ.

(3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ.

(4) $\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ. たとえば, $\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である.



(配点率 20 %)

(下 書 き 用 紙)

5　座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える．S_1 と S_2 の共通部分を C とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ．

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ．

（配点率 20 %）