

令和4年度

前期日程

数学問題

(注 意)

1. 問題冊子および解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文は、3 ページ、5 ページ、7 ページ、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子、および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

- 1 r を正の実数とする. 複素数平面上で, 点 z が点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき,

$$z + w = zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ.

(配点率 20 %)

2 $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ.

(2) $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき, $f(\cos \alpha) = 0$ が成り立つことを示せ.

(3) $\cos \alpha$ は無理数であることを示せ.

(配点率 20 %)

3 正の実数 t に対し, 座標平面上の 2 点 $P(0, t)$ と $Q\left(\frac{1}{t}, 0\right)$ を考える. t が $1 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき, 座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ.

(配点率 20 %)

4

$f(x) = \log(x+1) + 1$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = x$ は, $x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。
(2) (1) の解を α とする。実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

- (3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき, すべての自然数 n に対して,

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ。

- (4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ を示せ。

(配点率 20 %)

5 座標平面において、 t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^\pi, \quad y = e^t \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を C とする。曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(配点率 20 %)