B

令和6年度

前期日程

数学問題

〔注　意〕

1．問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．

2．**受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること．**

3．問題本文は，3 ページ，5 ページ，7 ページ，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．

4．解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．

5．解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること．**指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする．**

6．問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

7．解答用紙は持ち帰ってはいけない．

8．問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること．

1　自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3} \quad (x \geqq 0)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

（配点率 20 %）

2 α, β を複素数とし，複素数 z に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく．α, β は

$$\left|f(1) - 3\right| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad \left|f(i) - 1\right| \leqq 3$$

を満たしながら動く．ただし，i は虚数単位である．

(1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

(2) $f(1+i) = 0$ であるとき，α, β の値を求めよ．

（配点率 20 %）

3 空間内の 2 直線 ℓ, m はねじれの位置にあるとする．ℓ と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

（配点率 20 %）

4 $a > 1$ とする．xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．

(1) 円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1$，$y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする．(1) における V_1 について，$V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ．

（配点率 20 %）

5 自然数 1，2，3，$\cdots$，n のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする．

(1) 自然数 a，b，c および相異なる素数 p，q，r に対して，等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ．

（配点率 20 %）