

令和2年度

前期日程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文は、3 ページ、5 ページ、7 ページ、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子、および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1

関数

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geq 0)$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の最大値を求めよ。
- (2) $f(x)$ とその導関数の極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ。ただし、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることを用いてもよい。

- (3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、グラフの凹凸を調べる必要はない。

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 2 1 個のさいころを n 回投げて、 k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$ 、
出た目が 2 の場合は $X_k = -1$ 、その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする。

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき、 Y_1 から Y_n までの積 $Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_n$ を Z_n で表す。ただし、 i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1) Z_2 が実数でない確率を求めよ。
- (2) $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ がいずれも実数でない確率を求めよ。
- (3) Z_n が実数となる確率を p_n とする。 p_n を n を用いて表し、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 3 n を 2 以上の自然数とする. 三角形 ABC において, 辺 AB の長さを a , 辺 CA の長さを b で表す. $\angle ACB = n\angle ABC$ であるとき, $c < nb$ を示せ.

(配点率 20 %)

- 4 t を正の実数とする. xy 平面において, 連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad xy \leq 1, \quad x + y \leq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく. 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) - 2 \log t)$ を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において、辺 BC の長さを a 、
辺 CA の長さを b で表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させて
できる回転体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を固定して b の値を変化させるとき、 V が最大になるのは、
三角形 ABC が 辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである。
これを示せ。
- (2) a, b の値をともに変化させるとき、 V の最大値と、最大値を与える a, b
の値をそれぞれ求めよ。

(配点率 20 %)